LA MECANIQUE DES FLUIDES

par Ibrahim CISSE

DEFINITIONS ET CONCEPTS DE BASE

Fluides : ce sont les liquides et les gaz. Ils n'ont pas de forme propre, ils épousent la forme de leurs conteneurs.
Particule fluide : entité de fluide de forme sphérique et de taille mésoscopique à minima ; elle-même constituée d'une assemblée de molécules qui s'entrechoquent de façon aléatoire (agitation thermique).
Les fluides se distinguent par trois principales caractéristiques :

> **la continuité** : leurs propriétés physiques peuvent être décrites par des fonctions continues de l'espace et du temps.
>
> **la viscosité** : propriété intrinsèque à un fluide qui caractérise la résistance au mouvement de ses particules fluides les unes par rapport aux autres. Sous son l'effet, les particules les plus rapides ralentissent au profit des plus lentes et inversement.
>
> **la grande déformabilité** : l'exercice de faibles contraintes sur un fluide provoque de grands déplacements de ses particules. C'est ce qui les distingue particulièrement des solides.

La masse volumique : c'est le rapport de la masse de fluide par son volume. Elle correspond à la quantité de matière contenue dans une unité de volume.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

- ρ : masse volumique (en kg/m³)
- m : masse (en kg)
- V : volume (en m³)

Fluide incompressible : il a un volume qui ne change pas selon la pression qui lui ait appliquée.
Fluide compressible : fluide à volume variable suivant l'effort de pression qu'il subit.
Les liquides sont généralement considérés incompressibles et les gaz compressibles.
La vitesse d'une particule : c'est l'allure à la laquelle se déplace la particule. Elle traduit la variation de la position de la particule dans le temps.
La température : elle représente la valeur moyenne de l'énergie cinétique des molécules dans l'agitation thermique.
Mécanique des fluides : science de l'étude des fluides en équilibre et en mouvement et de l'interaction de ceux-ci avec des corps solides.
Statique des fluides : l'étude des fluides au repos.

> **Aérostatique** : statique des gaz.
>
> **Hydrostatique** : statique des liquides.

Dynamique des fluides : l'étude des fluides en mouvement.

> **Aérodynamique** : dynamique des gaz.
>
> **Hydrodynamique** : dynamique des liquides.

Ecoulement : mouvement du fluide dans un domaine donné.
Ecoulement incompressible : la masse volumique du fluide reste constante pendant l'écoulement.
Ecoulement compressible : la masse volumique du fluide varie pendant l'écoulement.
NB : La compressibilité d'un écoulement n'est pas celle à celle du fluide en question. On peut très bien avoir un écoulement incompressible de fluide compressible si sa masse volumique ne change pendant l'écoulement.

Fluide parfait : fluide de très faible viscosité.
Ecoulement parfait : lorsque l'influence de la viscosité peut être négligée. C'est le cas d'écoulements de fluides parfaits mais aussi celui de fluides visqueux mais dans lesquels la viscosité n'a pas influence significative.
Ecoulements libres : le fluide se déplace sans contraintes pariétales de tous les côtés.
ex : jets, panaches.
Ecoulements externes : le fluide est en contact avec une paroi matérielle mais son mouvement est illimité dans les autres directions.
ex : écoulement autour d'une aile d'avion, écoulement autour d'un cylindre.
Ecoulements internes : ce sont des écoulements confinés à l'intérieur de surfaces fermées.
ex : écoulements dans les veines, les canaux, les échangeurs de chaleur.
Trajectoire d'une particule : courbe descriptive de l'ensemble des positions successives qu'elle occupe dans son mouvement.
Ligne de courant : courbe qui possède en chacun de ses points une tangente parallèle aux vecteurs vitesses des particules fluides.
Tube de courant : c'est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.
Ecoulement laminaire : écoulement régulier avec des lignes de courant ne se mélangeant pas. Ecoulement pouvant être décrit sous forme de **lames** localement parallèles glissant les unes sur les autres.
Ecoulement turbulent : écoulement irrégulier, désordonné, marqué par une multitude d'échelles spatio-temporelle et un mélange important.
Vorticité : elle caractérise de la rotation locale des particules fluides. C'est le rotationnel du champ de vitesses.

$$\vec{\omega} = r\vec{o}tU$$

Vecteur tourbillon : il est défini comme la moitié de la vorticité.

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}r\vec{o}tU$$

Ecoulement irrotationnel : écoulement dont le rotationnel du champ de vitesses est nul. Ils sont aussi dits écoulements potentiels car le champ de vitesses correspond alors au gradient d'une fonction scalaire appélé potentiel.
Vitesse d'écoulement : même si d'usage, le terme "vitesse d'écoulement" n'est pas tout à fait exact. Il s'agit plutôt d'un champ de vitesses, c'est-à-dire une application qui à chaque particule de fluide de l'espace lui associe une vitesse.
Ecoulement subsonique : la vitesse de l'écoulement est inférieure à celle du son dans le milieu considéré.
Ecoulement supersonique : la vitesse de l'écoulement est supérieure à celle du son dans le milieu considéré.
Ecoulement sonique : la vitesse de l'écoulement est égale à celle du son dans le milieu considéré.
Vitesse de frottement : c'est la vitesse du fluide adjacent à une paroi solide.
Débit massique : mesure la masse de fluide qui traverse une section donnée par unité de temps.
Débit volumique : mesure le volume de fluide qui traverse une section donnée par unité de temps.
Tourbillon : zone de rotation cohérente et localisée dans un écoulement.
Description Lagrangienne : L'écoulement est décrit par suivi des particules fluides prises de façon individuelle dans leurs mouvement.
Description Eulérienne : ici, on se place en des points fixes de l'espace et on observe l'évolution des propriétés des différentes particules fluide qui y passent dans le temps. On est local.
Contrainte : elle désigne la force par unité de surface exercée sur une parcelle de fluide. Il existe deux types de contraintes dans les fluides :

- **Les contraintes normales (pression)** : contrainte normale à une surface interne au fluide.

- **Les contraintes de cisaillement** : contrainte parallèle à une surface interne du fluide. Cette contrainte est due au mouvement relatif entre les couches adjacentes de fluide et est donc directement liée à la viscosité du fluide.

Tenseur des contraintes : Il permet de décrire de manière complète les contraintes dans un fluide. Il s'agit d'une matrice qui regroupe les composantes normales et de cisaillement dans les trois directions de l'espace.
La trainée : c'est la force d'un fluide qui s'oppose au mouvement d'un objet immergé dans celui-ci.
Portance : c'est la force normale à la direction de l'écoulement qu'exerce un fluide sur un objet immergé dans celui-ci. Elle tend à le porter.
rugosité : aspérité présente à la surface des parois à travers lesquelles le fluide s'écoule.
Obstacle : élément de taille similaire aux grosses structures de l'écoulement qui entrave le passage du fluide.
Taux de déformations : c'est la partie symétrique du tenseur de gradient de vitesses. Elle caractérise la déformation des particules fluides ; ses éléments diagonaux mesurent les déformations linéiques (allongements/raccourssissements) de surfaces de fluide et les éléments non diagonaux aux glissements relatif de ces surfaces là.
Tenseur des taux de déformations : Il permet de décrire de manière complète les taux de déformations dans un écoulement.
Fluides newtoniens : le tenseur des contraintes de ces fluides à une dépendance linéaire et isotrope du tenseur des taux de déformations.
Fluides non newtoniens : Ce sont les fluides dont la viscosité dépend la contrainte qui leur ait aplliquée. C'est l'exemple du ketch up, de la peinture et de l'amidon de mais qui lorsque soumis à une agitation changent de viscosité.
La couche limite dynamique : lieu proche paroi ou les variations de vitesse sont fortement marquées.

Epaisseur de couche limite dynamique (δ) : elle correspond à l'ordonnée prise à partir de la paroi à laquelle on retrouve la vitesse de l'écoulement d'entrée U_{inf},

$$U(\delta) = 0.99U_{inf}$$

.
Couche limite mince : lorsque l'épaisseur de la couche limite est très faible de la longueur de la paroi, elle est dite mince.
Zone interne : du coté de la paroi, elle représente 20% de la couche limite. L'écoulement y est fortement conditionné par la paroi. Deux zones principales sont à dstinguer :

- **Sous couche visqueuse** : c'est la zone de la couche limite proche paroi dans laquelle les visqueux sont prédominants. L'écoulement y est laminaire.
- **Zone logarithmique** : située au dessus de la sous couche visqueuse, la vitesse y suit une loi logarithmique.

Zone externe : elle représente 80% de l'épaisseur de la couche limite, le gradient de vitesse y est faible. L'écoulement dans cette zone n'est pas influencé par la paroi.
La couche limite thermique : lieu proche paroi ou les variations de température sont fortement marqués.
Energie interne : énergie d'un système lié aux mouvements microscopiques et des interactions entre ses particules constitutives.
La circulation d'une particule : elle correspond à l'intégrale sur un contour le produit scalaire de la vitesse au déplacement élémentaire d'une particule fluide.

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Elle mesure la tendance de la particule à tourner sur un contour fermé ou encore l'effet net des tourbillons sur une surface d'un objet immergé dans l'écoulement.
Perte de charge : dissipation d'énergie du fluide dans son mouvement.
Perte de charge singulière : perte d'énergie liée aux variations géométriques du domaine (changement de direction, rétrécissement/ élargissements, présence de coudes/ vannes).
Perte de charge régulière : perte d'énergie du fluide due aux frottements visqueux du fluide avec les parois.
Evolution barotrope : la pression dans un fluide parfait compressible est en général fonction de deux variables thermodynamiques : l'entropie et la masse volumique. On dira qu'un fluide parfait compressible est en évolution barotrope si la pression ne dépend que de la masse volumique.

La mécanique des fluides joue un rôle important dans l'industrie et la recherche. L'aérodynamique intervient dans l'amélioration des performances des avions, des fusées et sert aussi de base pour l'étude des écoulements atmosphériques. L'hydrodynamique intervient dans la compréhension du fonctionnement des engins tels que les pompes mais aussi dans l'océanographie notamment dans la compréhension de la dynamique des vagues et des estuaires. L'étude des écoulements se fait analytiquement ou par voie numérique dans le cas des configurations ou la résolution analytique est ardue. L'approche numérique offre la capacité de traiter des problèmes aux conditions limites complexes, de faire des prédictions à long terme et permet de nous adapter plus facilement à l'évolution de nos connaissances de nos processus physiques.

Modélisation en mécanique des fluides

Lois fondamentales

- Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

où :

⋆ ρ est la densité du fluide,

⋆ $\vec{v}$ est le vecteur vitesse,

⋆ $\nabla \cdot$ représente l'opérateur de divergence,

⋆ $\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + \vec{v}.\nabla()$ représente la dérivée particulaire.

Pour un fluide incompressible, la densité du fluide est constante et l'équation se simplifie en :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{1}$$

- Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \nabla.\sigma + \vec{f_v} \tag{2}$$

Pour un fluide newtonien, le tenseur de contraintes est donné par :

$$\sigma = -pI + \lambda tr(D) + 2\mu D \tag{3}$$

où :

$tr()$ est l'opérateur trace,

D est le tenseur des taux de déformations du fluide,

λ et μ sont les coefficients de viscosité du fluide.

Dans ce cas, l'équation de conservation de quantité de mouvement devient alors :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla.\vec{v}) + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f_v} \tag{4}$$

où :

— $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est le terme d'accélération locale,

— $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ est le terme d'accélération convective,

— ∇p est le gradient de pression

— $\vec{f_v}$ est le vecteur des forces volumiques externes (comme la gravité).

- Conservation de l'énergie

$$\frac{\partial(\rho e_T)}{\partial t} + \nabla.(\rho e_T \vec{v}) = \nabla.(\sigma.\vec{v}) + \vec{f_v}.\vec{v} - \nabla.\vec{q} + r \tag{5}$$

où :

— e_T est l'énergie totale massique, somme de l'énergie cinétique massique et de l'énergie interne,
— $\vec{q}$ est le flux de chaleur,
— r la source volumique de chaleur.

Conditions aux limites en vitesse

Condition de glissement :
valable pour les fluides parfaits (à viscosité négligeable), cette condition traduit l'impossibilité pour les particules fluides de décoller d'une surface. Elles ont une vitesse purement tangentielle. Elle se traduit par :

$$\vec{v}.\vec{n} = 0$$

$\vec{n}$ étant le vecteur normal à la surface.

Condition d'adhérence :
Valable pour les fluides visqueux, elle traduit l'égalité de vitesse entre les particules de fluide à celle de la paroi elle-même sur laquelle elles se meuvent. La vitesse du fluide à la paroi est donc nulle si la paroi est immobile.

$$\vec{v} = \vec{v}_p$$

Similitude en mécanique des fluides

Simplifier l'étude des écoulements repose sur l'élaboration de méthodes de travail simplifiées qui préservent tout de même une représentation fidèle de la réalité physique. Il apparait ici de façon implicite et subtile la présence d'un nouveau système dans lequel cette méthodologie nouvelle/ ses nouvelles lois devraient s'appliquer.
En effet, la présence d'un grand nombre de paramètres dans les équations, la taille et la complexité des géométries des domaines rend dificile l'étude des écoulements.
L'atteinte de son objectif de simplification passe par la réponse aux suivantes interrogations naturelles : Les équations doivent-elles être changer/simplifier ? ne doit-on pas regrouper des paramètres/ en supprimer ? La taille du système peut-elle être réduite ou augmenter ? Des systèmes différents peuvent ils avoir la même dynamique ? Les résultats d'un système sont-ils transposables à d'autres ? si oui sous quels critères et quelles limites ? autrement dit pourrrait-on comprendre la dynamique d'un écoulement par la résolution d'une autre pls accessible ?
Le concept de la similitude est le siège de réponse à cet ensemble de questionnements. La similitude vise à faciliter une étude par la mise en place de nouveaux paramètres/ d'un nouveau système/ de nouvelles lois plus simples et de créer un pont de passage cohérent permettant de revenir au problème de départ.
Un petit retour à l'expérience permet de préciser quelques aspects de réponses. L'expérience de Reynolds à permis de mettre en évidence les paramètres impliqués dans le passage laminaire turbulent ; lesquels sont agglomérés dans le nombre de Reynolds. Ce constat nous laisse penser que d'autres propriétés de l'écoulement pourraient être gouverner des paramètres semblables.
En mécanique des fluides, l'adimensionnement des équations permet d'avoir des nombres adimensionnels correspondant pour certains à des critères de similitude.

Les nombres sans dimensions suivants sont essentiels pour garantir la similitude entre des écoulements étudiés en laboratoire et des écoulements réels. Ils permettent de définir des lois universelles applicables dans diverses conditions.

1. **Nombre de Reynolds (Re)**

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{U L}{\nu}$$

   Le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Utilisé pour caractériser les régimes d'écoulement (laminaire, turbulent).

2. **Nombre de Froude (Fr)**

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g L}}$$

   Le rapport entre les forces d'inertie et les forces gravitationnelles. Ce nombre est critique pour les écoulements influencés par la gravité, comme les écoulements en surface libre.

3. **Nombre de Mach (Ma)**

$$Ma = \frac{U}{c}$$

Le rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse du son dans le milieu. Important pour les écoulements compressibles, il permet d'évaluer les effets de compressibilité.

4. **Nombre d'Euler (Eu)**

$$Eu = \frac{\Delta P}{\rho U^2}$$

Le rapport entre les forces de pression et les forces d'inertie. Utilisé pour évaluer l'importance des variations de pression dans un écoulement.

5. **Nombre de Prandtl (Pr)**

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

Le rapport entre la diffusion de la quantité de mouvement et la diffusion thermique. Important pour les transferts de chaleur dans les écoulements.

6. **Nombre de Nusselt (Nu)**

$$Nu = \frac{h\,L}{k}$$

Le rapport entre le transfert de chaleur par convection et par conduction. Utilisé pour caractériser l'efficacité des échanges thermiques.

7. **Nombre de Péclet (Pe)**

$$Pe = \frac{U\,L}{\alpha}$$

Le rapport entre le transfert de chaleur par advection et par conduction. Utilisé dans les problèmes de transfert thermique et de masse.

Tout nombre sans dimensions n'est pas forcément un critère de similitude, il suffit en effet de diviser deux grandeurs de même dimensions. Il convient d'étudier leur construction et de voir les conséquences de leurs variations avant de les tuiliser comme critères.

Il est important de noter que l'égalité est difficilement assurée pour tout les paramètres en même temps. Leur égalité n'assure non plus pas l'égalité des solutions, il faut s'assurer que les conditions initiales et aux limites s'équivalent. Intuitivement, on concoit qu'il est plus probable que ce dernier point à plus à même d'être vrai si les systèmes ont des domaines de forme similaires ; une cinématique, des conditions aux limites et dynamiques semblables.

On dira ainsi que deux systèmes sont en **similitude géométrique** si Les rapports des dimensions géométriques de leurs domaines respectifs sont égaux. La **similitude cinématique** est vraie si les trajectoires des particules fluides sont similaires et les rapports des champs de vitesses constants. La **similitude dynamique** est vérifiée si les rapports des forces sont constants.

La similitude est utile pour :

Tests en Soufflerie : Utilisation de modèles réduits d'avions ou de voitures pour tester leurs performances aérodynamiques. Les conditions de test (vitesse de l'air, viscosité, etc.) sont ajustées pour correspondre aux nombres sans dimension du système réel.

Modélisation Hydraulique : Les barrages, les digues et les canaux sont souvent testés à l'échelle réduite pour étudier l'écoulement de l'eau et prévoir l'érosion ou les crues.

Les modèles doivent respecter les conditions de similitude géométrique, cinématique et dynamique pour être représentatifs des structures à grande échelle.

Etude des écoulements laminaires

Les écoulements laminaires présentent un aspect régulier et ordonné, les lignes de courant restent parallèles entre elles sans se mélanger. On se limite ici aux exemples d'écoulements sanguins dans les capillaires et de la sève dans les plantes.

Equations de Navier-Stokes simplifiées : pour les écoulements laminaires, les hypothèses généralement admises sont données ci-dessous. Elles doivent cependant être adaptées en fonction des conditions spécifiques du problème étudié.

* **La stationnarité** qui permet d'annuler les dérivées locales temporelles ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)
* **L'incompressibilité** de l'écoulement qui permet d'annuler les dérivées de masse volumique.
* **L'unidirectionnalité de l'écoulement** qui permet de limiter à une le nombre des variables spatiales.
* **Symétries** : les symétries du problème permettent d'étudier l'écoulement sur une partie du domaine et de transposer les résultats aux autres parties.
* **Négligence des forces externes.**

Pour des géométries simples et des conditions aux limites appropriées, il est parfois possible de trouver des solutions exactes des équations de Navier-Stokes pour cette classe d'écoulements.

Expériences en laboratoire

Écoulements en conduite : Des écoulements laminaires peuvent être générés en utilisant des conduites de géométries simples dans lesquelles les perturbations sont minimisées.

Dispositifs de visualisation : Des techniques de visualisation comme la coloration de fluide ou encore la méthode de fumée peuvent être utilisées pour observer et étudier le comportement des écoulements laminaires en laboratoire.

Mesures : Des capteurs de pression, de vitesse et d'autres instruments de mesure peuvent être utilisés pour caractériser les écoulements laminaires et mesurer des paramètres comme le débit, la pression et la vitesse.

Applications spécifiques

Conception de conduites et de canaux : Les écoulements laminaires sont souvent souhaités dans les systèmes de distribution d'eau et les canaux pour minimiser la perte d'énergie due à la turbulence.

Biologie et médecine : Les écoulements laminaires sont importants dans les études de la circulation sanguine, où des conditions d'écoulement régulières peuvent être cruciales pour la santé cardiovasculaire.

Ecoulement de Poiseuille cylindrique

Problème

On considère un écoulement laminaire dans un tube cylindrique de rayon R et de longueur L. On souhaite déterminer la vitesse du fluide $v(r)$, le débit volumique Q, et la perte de charge

ΔP en fonction des propriétés du fluide et des dimensions du tube.

Solution

1. Hypothèses

— Ecoulement laminaire.
— Régime permanent.
— Fluide newtonien incompressible.
— Débit uniforme sur toute la section du tube.
— Ecoulement unidirectionnel suivant l'axe du tube z.

2. Équation de Navier-Stokes simplifiée

Pour cet écoulement, l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques dans la direction axiale z se simplifie sous la forme suivante :

$$\frac{dP}{dz} = \mu \left(\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} \right)$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide, P est la pression, et $v(r)$ est la vitesse en fonction du rayon r.

3. Solution de l'équation

En intégrant deux fois cette équation, nous obtenons :

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} = \frac{1}{\mu}\frac{dP}{dz}$$

Posons $\frac{dP}{dz} = -\frac{\Delta P}{L}$, où $\Delta P = P_{entrée} - P_{sortie}$ est la différence de pression entre les deux extrémités du tube.

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{\mu L}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dv}{dr}) = -\frac{\Delta P}{\mu L}$$

En intégrant cette équation :

$$r\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\mu L}r^2 + C_1$$

En intégrant à nouveau :

$$v(r) = -\frac{\Delta P}{4\mu L}r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

4. Conditions aux limites

Pour déterminer les constantes d'intégration, on utilise les conditions aux limites :

— la vitesse doit être finie au centre au tube ($\frac{dv}{dr}(r = 0) = 0$). Cela implique que $C_1 = 0$

— $v(R) = 0$ (vitesse nulle à la paroi du tuyau) :

$$v(R) = -\frac{\Delta P}{4\mu L}R^2 + C_2 = 0 \implies C_2 = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L}$$

Donc la vitesse est donnée par :

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\mu L}(R^2 - r^2)$$

5. Débit volumique Q

Le débit volumique Q est donné par l'intégrale de la vitesse sur la section du tuyau :

$$Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} v(r) r dr d\theta = \int_0^R v(r) \cdot 2\pi r\, dr$$

En substituant $v(r)$:

$$Q = \int_0^R \frac{\Delta P}{4\mu L}(R^2 - r^2) 2\pi r\, dr$$

$$Q = \frac{\Delta P \pi}{2\mu L} \int_0^R (R^2 r - r^3)\, dr$$

$$Q = \frac{\Delta P \pi}{2\mu L} \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$Q = \frac{\Delta P \pi}{2\mu L} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right)$$

$$Q = \frac{\Delta P \pi R^4}{8\mu L}$$

d'ou la loi de Poiseuille :

$$\Delta P = \frac{8\mu L Q}{\pi R^4}$$

6. Perte de charge ΔP

La perte de charge régulière $h_f$est donnée par :

$$h_f = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{8\mu L Q}{\pi R^4 \rho g}$$

Ces résultats permettent de comprendre comment le débit volumétrique d'un fluide dans une canalisation circulaire est affecté par les propriétés géométriques de la canalisation et les conditions d'écoulement, comme la différence de pression et la viscosité du fluide.

0.1 Ecoulement de Poiseuille entre deux plaques parallèles

Considérons un écoulement laminaire incompressible et stationnaire entre deux plaques parallèles infinies, situées respectivement à $y = 0$ et $y = h$. La plaque inférieure est fixe et la plaque supérieure se déplace avec une vitesse U dans la direction x. De plus, un gradient de pression constant $\frac{\partial p}{\partial x} = -G$ est appliqué dans la direction x. Déterminons le profil de vitesse

$u(y)$ entre les plaques.

Équations de Navier-Stokes

Pour un écoulement stationnaire, incompressible et unidirectionnel ($u = u(y)$ et $v = 0$), les équations de Navier-Stokes dans la direction x se simplifient en :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide et $-\frac{\partial p}{\partial x} = G$ est le gradient de pression constant. L'équation devient alors :

$$0 = -G + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Résolution de l'équation

Nous intégrons cette équation deux fois par rapport à y pour obtenir le profil de vitesse $u(y)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{G}{\mu}$$

Intégrons une première fois :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{G}{\mu} y + C_1$$

Intégrons une deuxième fois :

$$u(y) = \frac{G}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

Conditions aux limites

Les conditions aux limites pour ce problème sont :

(a) À $y = 0$, la vitesse est nulle (plaque inférieure fixe) : $u(0) = 0$.

(b) À $y = h$, la vitesse est U (plaque supérieure se déplace avec une vitesse U) : $u(h) = U$.

Appliquons la première condition aux limites :

$$u(0) = 0 \implies \frac{G}{2\mu} \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \implies C_2 = 0$$

Appliquons la deuxième condition aux limites :

$$u(h) = U \implies \frac{G}{2\mu} h^2 + C_1 h = U$$

Résolvons pour C_1 :

$$C_1 = \frac{U - \frac{G}{2\mu} h^2}{h} = \frac{U}{h} - \frac{Gh}{2\mu}$$

Profil de vitesse

Le profil de vitesse final est :

$$u(y) = \frac{G}{2\mu}y^2 + \left(\frac{U}{h} - \frac{Gh}{2\mu}\right)y$$

Etude des écoulements turbulents

Les écoulements se carctérisent par des irrégularités des champs dynamiques, par la présence des diférentes échelles spatio-temporelles et un un fort mélange.

Echelles et grandeurs turbulentes

- Echelle intégrale (L) carctérise des dimensions spatiales ou temporelles des grandes structures de l'écoulement. On distingue :

  L'intégrale intégrale spatiale
  $$L = \int_0^\infty \rho(r)\, \mathrm{d}r$$
  avec $\rho(r)$ est la fonction de corrélation des vitesses en fonction de la distance r,

  — L'échelle intégrale temporelle
  $$L = \int_0^\infty \rho(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$
  avec $\rho(\tau)$ est la fonction de corrélation des vitesses en fonction du décalage temporel τ
- Echelle de Kolmogorov ou échelle de dissipation η : cette longueur représente la taille des plus petites structures dans le fluide.
  $$\eta = (\frac{\nu^3}{\epsilon})^{1/4}$$
- Echelle de Taylor λ : située entre l'intégrale spatiale et celle de Kolmogorov,elle sert de quantification de la transition entre échelles échelles énergétiques dominées par l'inertie et les plus petites dominées par les effets visqueux.
  $$\lambda = \sqrt{\frac{15\nu I^2}{\varepsilon}}$$
  avec I l'intensité turbulente.
- énergie cinétique turbulente :énergie cinétique liée aux fluctuations turbulentes.

Cascade turbulente

C'est le mécanisme de transfert d'énergie entre les différentes échelles du mouvement turbulent. Les grandes structures empruntent de l'énergie au champ moyen et la transmettent progressivement aux structures intermédiaires. Ce processus se poursuit jusqu'à la plus petite échelle, appelée échelle de dissipation. À ce stade, l'énergie est dissipée sous forme de chaleur par effets visqueux et frottement à la paroi.

Compte tenu de leur complexité, les écoulements turbulents son traités essentiellement par voie numérique. Le caractère aléatoire de la turbulence laisse place à son traitement par la statistique. Les variables turbulentes sont ainsi décomposées en somme de parties moyennes et fluctuantes : c'est la décomposition de Reynolds. Les écoulements turbulents correspondraient donc à un écoulement moyen auquel se superposent des fluctuations. Selon qu'on modélise ou pas des fluctuations turbulentes, on distingue les approches suivantes :

RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes)

Cette approche ne vise que la simulation du champ moyen de la turbulence ; les fluctuations turbulentes sont modélisées.

URANS (Unstationnary Reynolds Averaged Navier Stokes)

La moyenne temporelle utilisée par défaut en RANS fait qu'il est par construction stationnaire. L'approche URANS est l'extension du RANS qui permet de résoudre les instationnarités des champs moyens turbulents.

LES (Large Eddy Simulation)

Les grandes échelles qui contiennent l'essentiel de l'énergie de l'écoulement sont ici résolues (simulées) et les petites échelles filtrées et modélisées.

RANS/ LES

Cette approche hybride vise l'unification des meilleures de ces méthodes. On utilise la LES ou le RANS ne fonctionne pas et le RANS là la LES couterait trop cher. Le RANS dans la couche et la LES loin des parois ; les complexités géométriques sont levées par la LES et la discrétisation fine évitée par le RANS.

DNS : Direct Numerical Simulation

La DNS (Direct Numerical Simulation) est la résolution directe des équations instantanées de Navier-Stokes, sans aucune forme de moyennage ou de modélisation de la turbulence. Cette méthode nécessite cependant une discrétisation assez fine pour capturer les plus petites échelles turbulentes. Le coût des simulations reste assez élevé ce qui pose problème en pratique sur tout dans le monde industriel. La DNS est principalement utilisée dans la recherche pour comprendre les mécanismes fondamentaux de la turbulence et valider les modèles de turbulence. Elle est rarement utilisée dans les applications industrielles en raison de sa demande élevée en ressources de calcul.

Le choix d'une approche dépend principalement de l'objectif de la simulation. Il s'agit de faire un compromis entre précision et coût de calcul.

Simulation numérique

La résolution des écoulements par voie numérique est couramment appelée la "CFD" (Computationnal Fluid Dynamics). Contrairement aux approches analytiques et expérimentales, l'approche numérique permet la résolution d'une large gamme de problèmes notamment ceux à géométries et conditions aux limites complexes.

Diverses applications :

Industrie Aérospatiale : Conception et optimisation des profils aérodynamiques des ailes, des turbines et des fuselages pour améliorer les performances et réduire la traînée.

Automobile : Études aérodynamiques pour améliorer l'efficacité énergétique et réduire le bruit. Analyse des systèmes de refroidissement et de lubrification.

Architecture et Construction : Analyse des flux d'air autour des bâtiments pour améliorer le confort climatique, l'efficacité énergétique et la sécurité.

Étapes principales d'une simulation numérique

1. Définition du problème

Définition géométrique : créer le modèle géométrique du domaine de l'écoulement.

Définition des propriétés du fluide : la masse volumique, la viscosité, conductivité thermique, ...

Définir Les conditions initiales des champs dynamiques (vitesse, pression, température, ...)

Défnir les conditions aux limites aux entrées, sorties et aux parois de la géométrie.

2. Maillage

C'est la géométrie définie est divisée en petits éléments. Le maillage est raffiné dans les zones dans les zones de forts gradients (proches des parois solides, zones de détachement et de recirculation, interfaces de phase en cas d'écoulements multiphasiques). Il est cependant important de faire un compromis entre la finesse du maillage et temps de calcul.

3. Sélection du modèle physique et des équations

Choisir les équations appropriées pour modéliser le problème. Cela inclut :

— A celles de Navier-Stokes peuvent être superposées d'autres équations selon les phénomènes supplémentaires mis en jeu. Par exemple les équations de phase pour les écoulements multiphasiques, les équations de concentration des espèces chimiques pour modéliser la formation/destruction des espèces chimiques. D'autres types d'équations peuvent être ajouter non pas dans le but du calcul de l'écoulement mais d'autres quantités d'intéret. Les équations de transport de scalaires par exemple (concentration de substances transportées par l'écoulement, débit de dose d'un rejet, etc.)

— Choix des modèles de turbulence (RANS, LES, DNS) selon lee besoins et les ressources disponibles.

5. Résolution numérique

Choix de méthodes numériques :

explicite : La mise à jour des variables dépend uniquement des valeurs connues et des conditions initiales sans nécessiter de résolution d'un système d'équations. Les méthodes explicites sont faciles à implémenter et efficaces mais tout en étant limité par une condition de stabilité qui impose une contrainte sur la taille du pas de temps, rendant le calcul coûteux pour des problèmes fortement transitoires (écoulement variant trop vite : formation et dissipation de tourbillons très rapide ; il faudrait choisir de très petits pas de temps) ou à faible viscosité (la viscosité agit en effet comme un stabiliseur et si elle est faible la dynamique est rapide).

implicite : Ici, les valeurs des variables sont calculées en résolvant un système d'équations. Permet souvent une meilleure stabilité numérique que les méthodes explicites. Plus complexe à implémenter et plus coûteux en termes de temps de calcul, surtout si le système d'équations est non linéaire et nécessite plusieurs itérations pour converger.

semi-implicite : Un schéma semi-implicite combine à la fois des termes explicites et implicites dans la résolution des équations. Cela permet de réduire la sensibilité aux conditions CFL tout en conservant une partie de la simplicité et de l'efficacité des schémas explicites. Il offre un compromis entre les schémas explicites et implicites en terme de stabilité numérique et de coût de calcul.

Choix de critères de convergence :

La **convergence numérique** caractérise la quasi invariance de la solution numérique au fil des itérations. Les différences entre solutions numériques dans le procesus itératif est nommée résidus ; ceux-ci devant être en baisse et au mieux être en dessous de la valeur fixée par l'utilisateur.
La **convergence en maillage** correspond à l'indépendance des résultats du maillage.

6. Post-traitement des résultats

— Vérification : s'assurer que les équations sont correctement résolues (convergence, stabilité).
— Visualiser et analyser les résultats obtenus (champs de vitesse, pression, température, etc) et des grandeurs dérivées (forces, moments, coefficients aérodynamiques, etc).
— Vérification et validation des résultats (comparaison avec des données expérimentales ou des solutions analytiques).

7. Optimisation

Basé sur les résultats et leur analyse, ajuster le modèle ou affiner la simulation :

— Raffiner le maillage si nécessaire sans pour autant alourdir le temps de calcul au détriment d'une faible précision.
— Ajuster les modèles physiques ou les conditions aux limites.
— Effectuer des études paramétriques pour optimiser la performance.